

文章编号: 2097-096X(2023)-02-0148-09

基于最大熵原理的泄洪雾化雨滴谱研究

彭燕祥, 张 华

(华北电力大学 水利与水电工程学院, 北京 102206)

摘要: 水电站在泄洪期间, 会在下游空间形成大量的粒径大小各异的运动水滴, 就构成了泄洪雾化液滴粒径的分布问题。目前泄洪雾化液滴粒径分布采用 Gamma 函数来描述, 属于经验函数的方法, 缺乏实际的物理意义。本文将最大熵原理应用于水电站泄洪雾化液滴粒径分布研究中, 对挑流泄洪产生的液滴粒径分布进行了研究。研究结果表明: (1) Gamma 分布计算的雾化液滴滴谱分布结果存在削峰特征, 滴谱分布的众值直径(数量概率密度最大对应的直径)偏向于小粒径方向, 且计算的峰值比实验值偏低。(2) 仅通过质量守恒为约束推导的最大熵 MEM 分布的计算的滴谱分布的众值直径明显偏向于大粒径方向, 且计算的峰值比实验值偏高。(3) 本文构建的 MEP 分布模型计算的结果与 Gamma 函数和 MEM 分布计算结果相比较, 均方根误差最低, 决定系数最高, 更加符合实测数据的变化趋势。

关键词: 液滴粒径分布; 最大熵原理; Gamma 函数; 挑流; 泄洪雾化;

中图分类号: TV135.2

文献标识码: A

doi: 10.13244/j.cnki.jiwhr.20220369

1 研究背景

泄洪雾化可视为一种非自然的危害性气象事件, 贯穿于大坝泄流的全周期^[1-3]。根据消能方式的不同, 泄洪雾化可分为底流泄洪雾化和挑流泄洪雾化, 特别是挑流泄洪雾化, 雾化降水可能诱发两岸边坡塌滑、威胁水电站输电系统运行安全、造成厂区交通道路中断等^[4-6]。因此, 泄洪雾化是我国水利水电工程建设和运行中急需解决的问题之一。而泄洪雾化液滴的粒径分布是泄洪雾化微观机理的重要组成部分, 是描述降水演变过程和定量预测降水强度的基础^[7-9]。

描述雾化液滴的粒径分布的函数称为液滴谱, 气象上也称为降雨滴谱。降雨滴谱研究, 最早在自然降水过程中有比较广泛的研究及应用。它为云的参数化以及雷达、卫星反演降水提供经验关系^[10-11]。研究表明, 雨滴谱可以用 Marshall 和 Palmer 于 1948 年提出的 M-P 分布^[12]、Gamma 分布^[13]等来描述。不同的分布函数适用的降水类型不同, M-P 分布对于稳定降雨的滴谱的拟合效果较好, 而 Gamma 分布对各类降水滴谱的拟合效果都很好^[14]。

基于 Gamma 分布对于降水滴谱良好的拟合效果, 2002 年刘士和等^[15]将 Gamma 分布引入到挑流泄洪雾化的研究中, 将喷溅水滴的粒径分布用 Gamma 分布进行描述。2003 年张华等^[16]提出了水滴随机喷溅的数学模型, 采用 Gamma 分布分别对雾化喷溅液滴的粒径和速度进行描述。但是少有实验或原型观测数据, 对挑流泄洪喷溅液滴服从 Gamma 分布进行验证。

2011 年范敏等^[17]通过溅水实验研究了水舌入水角为 45° 和 90° 条件下雾化雨滴的数量分布, 结果表明, 喷溅液滴的粒径数量概率密度分布可以用 Gamma 分布近似, 速度的分布可以用威布尔分布表示。在后续的水滴随机喷溅的数学模型中, 对于喷溅液滴的初始分布都是采用 Gamma 分布进行描述^[18-19]。但是文献[17]的溅水实验仅考虑了两种水舌入水角度工况, 实验样本较小, 并不能充分说明 Gamma 分布适用于挑流泄洪雾化的所有工况。

收稿日期: 2022-10-11; 网络首发时间: 2023-03-23

网络首发地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/10.1788.TV.20230321.1756.001.html>

基金项目: 国家自然科学基金项目(52279065)

作者简介: 彭燕祥(1991-), 硕士, 主要从事水工水力学研究。E-mail: pengyanxiang@ncepu.edu.cn

通讯作者: 张华(1962-), 博士, 教授, 主要从事水工水力学研究。E-mail: zhanghua@ncepu.edu.cn

于是刘丹等^[20]通过模型实验,对挑流泄洪雾化产生的液滴粒径分布进行了更加系统的研究。研究表明, Gamma 分布的计算结果在谱粒径中段与实测值一致,而在大小粒径端与实测值存在偏差,以及削峰特征。

由此可见采用 Gamma 分布来描述泄洪雾化的液滴滴谱存在以下几个缺点:(1)对于泄洪雾化来说,其形成机理不同于自然降雨。自然降雨主要是液滴的碰撞凝结而形成,而泄洪雾化主要是液体的破碎喷溅而形成的。(2)应用 Gamma 等分布研究泄洪雾化液滴粒径分布,属于经验函数的方法,缺乏实际的物理意义,导致过分的依赖实验数据,无法对不同类型和工况条件下液体破碎粒径概率密度分布进行计算。

而对于这种液体破碎形成的液滴的粒径分布方法的研究,在内燃机领域研究较多。研究方法可以概括为两种,一种是经验函数法,其特点是采用实验数据对分布函数中的参数进行确定,以使分布函数满足通过实验获得的液滴粒径概率密度分布。研究者们通过研究得到了不同的液滴粒径经验分布函数,包括正态分布、上下限分布、根正态(root-normal)分布、Rosin-Rammler 分布、Nukiyama-Tanasawa 分布函数、对数双曲分布函数、三参数对数双曲线分布函数等。前面提到的降水滴谱研究采用的 M-P 分布和 Gamma 分布也属于这种方法。

另一种方法就是最大熵原理法。通过使用不同的约束条件,可以得到不同的分布模型。根据约束的性质,又可将其分为物理守恒约束和平均直径约束两类。

1985 年, Sellens 首次提出了基于质量守恒约束的最大熵分布模型(MEM)。随后, Sellens 等人^[21]尝试使用这个方法预测喷雾液滴的粒径数量概率密度分布。同时, Li 等人^[22]基于 MEM 模型推导了带有修正系数的喷雾液滴粒径数量概率密度分布公式,并与细水雾液滴粒径分布的实验数据进行了比较。

然而, MEM 模型分布在计算液滴数量概率密度分布中,计算结果与实验结果偏差较大,且需要确定源项。在大多数情况下,源项确定的难度较大,且计算复杂。

为了解决这个问题, Cousin 等人^[23]提出了以平均粒径为约束条件的双参数 MEM 模型,但该模型对液滴数量概率密度分布的预测效果并不理想。为了提高预测精度, Dumouchel 等人^[24]提出了引入第三个参数 D_0 的方法,即沿粒径方向移动原始坐标轴以修改 MEM 分布。2005 年, Dumouchel 等人^[25]通过引入伽马参数对 MEM 分布进行了修正,使 MEM 可以更好地应用于粒径分布的预测,结果在一定程度上得到了改进。但是通过平均直径推求的分布函数,在约束机制上缺乏实际的物理意义,所以函数形式并不固定,且模型中涉及的参数仍需要试验获得,从而制约了该法的应用。

基于此,本文基于最大熵原理,以质量守恒,动量守恒,以及能量守恒为约束,推导出雾化液滴的粒径分布函数,并且构造出适用于泄洪雾化条件的函数求解方法,首次从理论角度对泄洪雾化产生的液滴粒径分布进行研究。

2 研究方法

2.1 伽马分布(Gamma) 三参数伽马分布的概率密度函数,由下式给出:

$$f_{nG}(\bar{D}) = b\bar{D}^{\beta} \exp(-\Lambda\bar{D}) \quad (1)$$

式中: b 为截距参数; β 为尺寸参数; Λ 为斜率参数; \bar{D} 为无量纲液滴直径。

2.2 最大熵理论分布模型(MEM) 1957 年 Jaynes^[26]首次将概率理论与玻尔兹曼熵理论相结合,从数学上证明并定义了信息熵的表达式:

$$S = -k \sum_{i=1}^n P_i \ln P_i \quad (2)$$

式中: S 为信息熵; k 为常数; n 为系统可能出现的状态总数; P_i 为状态 i 出现的概率。

P_i 为连续分布时,式(2)可以写成:

$$S = -k \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x) dx \quad (3)$$

最大熵原理的基本思想是：在某一系统各种微观状态概率分布不确定的条件下，对系统未知概率分布最合理的推断就是在已知的系统约束条件下，系统的信息熵最大。

根据质量守恒条件可以推导出液滴粒径的分布函数为^[21]：

$$f'_n(\bar{D}) = \lambda_0 \bar{D}^2 \exp(-\lambda_1 \bar{D}^3) \quad (4)$$

式中： λ_0 、 λ_1 为最大熵分布参数。

2.3 挑流泄洪雾化液滴粒径分布模型 (MEP) 采用数量概率密度函数描述泄洪雾化液滴的粒径分布。建立挑流泄洪雾化液滴粒径分布模型，需要确定雾化的守恒约束条件，这就需要将泄洪雾化过程进行简化。研究表明掺气水舌入水是挑流泄洪雾化主要的雾源，所以本文主要研究掺气水舌入水喷溅过程，高速水舌落入下游河床，与下游水体相互碰撞从而形成液膜，在重力和周围环境的作用下，液膜进一步分裂成液滴的过程，如图 1 所示。雾化过程不考虑液滴的蒸发和凝结过程，假定质量为 m 的液膜破碎形成 N 个液滴，其中容积为 V_i ， m^3 ；速度大小 U_j ， m/s ；速度方向与液膜运动方向夹角 θ_k 的液滴数为 $n_{i,j,k}$ ，则 $P_{i,j,k} = \frac{n_{i,j,k}}{N}$ 表示它的数量概率。

雾化的质量守恒可以表示为：

$$\sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} N \rho_l V_i = m \quad (5)$$

式(5)也可以写成：

$$\sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} \bar{D}_i^3 = 1 \quad (6)$$

其中 $\bar{D}_i = \frac{D_i}{D_{30}}$ 为无量纲直径， D_{30} 为质量平均直径。

沿液膜运动方向的单位质量的动量方程：

$$\sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} \bar{D}_i^3 U_j \cos \theta_k = U_l + \frac{S_{mv}}{m} \quad (7)$$

式中 U_l 为泄洪雾化液膜的平均速度， m/s ； S_{mv} 为空气与液膜动量交换以及沿液膜运动方向外力引起的源项， $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ 。

根据能量方程可知在泄洪雾化过程中，液膜破碎成小液滴，能量转换过程应该考虑位能、动能、压能以及液滴表面自由能。

单位质量的能量方程可以表示为：

$$\sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} \left(\frac{1}{2} \bar{D}_i^3 U_j^2 \right) + \frac{p_d + \sigma s_d}{\rho_l} + g \bar{h}_d = \frac{1}{2} U_l^2 + \frac{p_l}{\rho_l} + \frac{\sigma s_l}{m} + g \bar{h}_l + \frac{S_{eg}}{m} \quad (8)$$

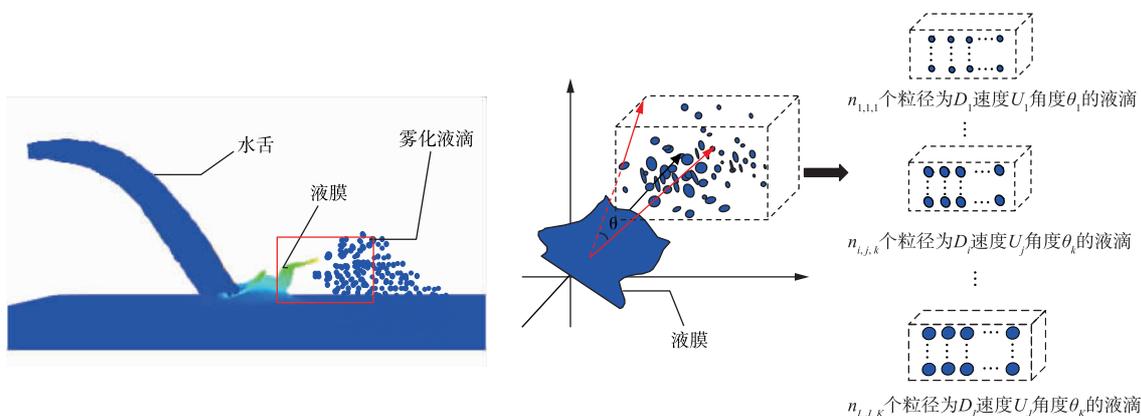


图 1 液膜雾化示意图

Fig.1 Schematic diagram of liquid film atomization

式中：\$s_l\$为液膜的表面积，\$\text{m}^2\$；\$s_d\$为液滴的表面积，\$\text{m}^2\$；\$p_l\$为液膜受到的压强，Pa；\$p_d\$为液滴的压强，Pa；\$\rho_l\$为液体密度，\$\text{kg}/\text{m}^3\$；\$\bar{h}_l\$为液膜的初始位势高度，m；\$\bar{h}_d\$为生成的液滴的平均位势高度，m；\$S_{eg}\$为液膜与空气作用的能量源项，\$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2\$。

式(8)通过变形可得：

$$\sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} \left(\frac{1}{2} \bar{D}_i^3 U_j^2 \right) + \frac{(p_d - p_l)}{\rho_l} + \frac{\sigma s_d}{m} = \frac{1}{2} U_l^2 + \frac{\sigma s_l}{m} + g(\bar{h}_l - \bar{h}_d) + \frac{S_{eg}}{m} \quad (9)$$

根据拉普拉斯压力的计算公式可得：

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (10)$$

其中 \$\Delta p\$ 为作用在界面两侧的压强差，Pa；\$R_1\$、\$R_2\$ 为受附加压强 \$\Delta p\$ 作用的曲面上某点的任意两个正交的曲率半径。假定液滴的形状为球体，则有 \$R_1 = R_2 = \frac{D}{2}\$，则生成 \$n_i = \sum_j \sum_k n_{i,j,k}\$ 个粒径为 \$D_i\$ 的液滴，如图 1 所示，液膜与液滴之间的压能为：

$$V_i(p_{li} - p_{di}) = \frac{\pi D_i^3}{6} n_i [p_0 - (p_0 + \Delta p_i)] = -\frac{2n_i \sigma}{3} D_i^2 \quad (11)$$

式中：\$p_{li}\$ 为液膜受到的压强，Pa；\$p_{di}\$ 为粒径为 \$D_i\$ 的液滴受到的压强，Pa；\$p_0\$ 为大气压强，Pa。

\$N = \sum_i n_i\$ 个液滴，压能变化项 \$\frac{m(p_l - p_d)}{\rho_l}\$ 可以表示为：

$$\frac{m(p_l - p_d)}{\rho_l} = \sum_i V_i(p_{li} - p_{di}) = -\sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} N \frac{2\pi \sigma D_i^2}{3} = -\frac{2\sigma \pi N}{3} \sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} D_i^2 \quad (12)$$

雾化后生成液滴的表面积可以表示为：

$$s_d = \pi N \sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} D_i^2 \quad (13)$$

将式(12)和(13)代入(9)中可得单位质量的能量方程：

$$\sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} \left(\frac{1}{2} \bar{D}_i^3 U_j^2 \right) + \frac{10\sigma}{\rho_l D_{30}} \sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} \bar{D}_i^2 = \frac{1}{2} U_l^2 + \frac{S_e}{m} \quad (14)$$

其中能量源项 \$S_e = \sigma s_l + mg(\bar{h}_l - \bar{h}_d) + S_{eg}\$。

归一化条件：

$$\sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} = 1 \quad (15)$$

有无限多个分布函数 \$P_{i,j,k}\$ 能够满足方程(6)、(7)和(14)和(15)，但是偏差最小(或最真实)的分布是系统信息熵最大化的分布。

信息熵式(2)可以写成：

$$S = -K \sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} \ln P_{i,j,k} \quad (16)$$

构造的拉格朗日函数如下：

$$\begin{aligned} L(P_{i,j,k}) = & -K \sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} \ln P_{i,j,k} + \alpha_0 \left(\sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} - 1 \right) + \alpha_1 \left(\sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} \bar{D}_i^3 - 1 \right) + \\ & \alpha_2 \left(\sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} \bar{D}_i^3 U_j \cos \theta_k - U_l - \frac{S_{mv}}{m} \right) + \alpha_3 \left[\sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} \left(\frac{1}{2} \bar{D}_i^3 U_j^2 \right) + \right. \\ & \left. \frac{10\sigma}{\rho_l D_{30}} \sum_i \sum_j \sum_k P_{i,j,k} \bar{D}_i^2 - \frac{1}{2} U_l^2 - \frac{S_e}{m} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

令 \$\frac{\partial L(P_{i,j,k})}{\partial P_{i,j,k}} = 0\$，则可得：

$$P_{i,j,k} = f_n(\bar{V}, U, \theta) = a \exp \left[-\alpha_1 \bar{D}^3 - \alpha_2 \bar{D}^3 U \cos \theta - \alpha_3 \left(\bar{D}^3 U^2 + \frac{20\sigma}{\rho_l D_{30}} \bar{D}^2 \right) \right] \quad (18)$$

式中： a 、 α_1 为无量纲拉格朗日参数， α_2 为拉格朗日参数， s/m ， α_3 为拉格朗日参数， s^2/m^2 。

则体积为 $\overline{V_{n-1}} < \overline{V} < \overline{V_n}$ ，速度大小为 $U_{n-1} < U < U_n$ ，速度方向为 $\theta_{n-1} < \theta < \theta_n$ 液滴的概率可以表示为^[27-29]：

$$P(\overline{V_{n-1}} < \overline{V} < \overline{V_n}, U_{n-1} < U < U_n, \theta_{n-1} < \theta < \theta_n) = \sum_{\overline{V_{n-1}}}^{\overline{V_n}} \sum_{U_{n-1}}^{U_n} \sum_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} f_n(\overline{V}, U, \theta) \quad (19)$$

假定液滴体积和速度是连续变化的，式(19)可以写成：

$$\begin{aligned} P(\overline{V_{n-1}} < \overline{V} < \overline{V_n}, U_{n-1} < U < U_n, \theta_{n-1} < \theta < \theta_n) &= \int_{\overline{V_{n-1}}}^{\overline{V_n}} \int_{U_{n-1}}^{U_n} \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} f_n(\overline{V}, U, \theta) d\overline{V} dU d\theta \\ &= \int_{\overline{D_{n-1}}}^{\overline{D_n}} \int_{U_{n-1}}^{U_n} \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} 3\overline{D}^2 f_n(\overline{D}, U, \theta) d\overline{D} dU d\theta \end{aligned} \quad (20)$$

则雾化液滴粒径与速度的联合概率密度函数，可表示为：

$$f_n(\overline{D}, U, \theta) = 3a\overline{D}^2 \exp\left[-\alpha_1\overline{D}^3 - \alpha_2\overline{D}^3 U \cos\theta - \alpha_3\left(\overline{D}^3 U^2 + \frac{20\sigma}{\rho_l D_{30}} \overline{D}^2\right)\right] \quad (21)$$

在角 θ 维度上对方程组进行积分，可以得到液滴粒径与速度的联合数量概率密度分布：

$$f_n(\overline{D}, U) = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} f_n(\overline{D}, U, \theta) d\theta = 3a\overline{D}^2 \exp\left[-\alpha_1\overline{D}^3 - \alpha_3\left(\overline{D}^3 U^2 + \frac{20\sigma}{\rho_l D_{30}} \overline{D}^2\right)\right] \times \quad (22)$$

$$\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \exp(-\alpha_2\overline{D}^3 U \cos\theta) d\theta$$

$$\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \exp(-\alpha_2\overline{D}^3 U \cos\theta) d\theta = \exp(-\alpha_2\overline{D}^3 U) \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \exp(\cos\theta) d\theta \quad (23)$$

$\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \exp(\cos\theta) d\theta$ 的积分结果不能用初等函数进行表示，通过数值积分可对其进行积分，且积分的结果是关于 θ_{\min} 、 θ_{\max} 的函数。

式(23)可以写成：

$$\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \exp(-\alpha_2\overline{D}^3 U \cos\theta) d\theta = \exp(-\alpha_2\overline{D}^3 U) F(\theta_{\min}, \theta_{\max}) \quad (24)$$

则在角 θ 维度上对方程组进行积分，式(22)可以写成：

$$f_n(\overline{D}, U) = 3aF(\theta_{\min}, \theta_{\max})\overline{D}^2 \exp\left[-\alpha_1\overline{D}^3 - \alpha_2\overline{D}^3 U - \alpha_3\left(\overline{D}^3 U^2 + \frac{20\sigma}{\rho_l D_{30}} \overline{D}^2\right)\right] \quad (25)$$

本文主要研究挑流泄洪雾化的滴谱分布，则可以将 $aF(\theta_{\min}, \theta_{\max})$ 看成未知数 γ 。在速度方向取 $(0 < U < +\infty)$ 对 $f_n(\overline{D}, U)$ 进行积分可得滴谱分布 $f_n(\overline{D})$ 的表达式即液滴粒径数量概率密度边缘分布(MEP)：

$$f_n(\overline{D}) = \int_{U_{\min}}^{U_{\max}} f_n(\overline{D}, U) dU = \frac{3\gamma\sqrt{\pi\overline{D}}}{2\sqrt{\alpha_3}} \exp\left(-\alpha_1\overline{D}^3 + \frac{\alpha_2^2}{4\alpha_3}\overline{D}^3 - \alpha_3\frac{20\sigma}{\rho_l D_{30}}\overline{D}^2\right) \times \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_3}\sqrt{(\alpha_3\overline{D}^3)}\right)\right] \quad (26)$$

2.4 雾化液滴粒径分布函数求解 式(26)中含有4个未知数，所以需要4个方程对 $f_n(\overline{D})$ 进行求解。一般情况将式(21)代入方程(6)、(7)、(14)以及(15)中可以构成封闭的方程组，这个方法适用于液膜初始条件容易获取，且雾化环境相对简单的情况。对于泄洪雾化来说，液膜的初始条件与泄洪工况、下游水位、环境条件等都息息相关，且泄洪雾化过程伴随着环境风和水舌风的作用，外部环境复杂，求解动量和能量的源项十分困难。故本文通过液滴粒径的阶矩法构建封闭方程组，对 $f_n(\overline{D})$ 进行求解。方程组如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\overline{D}_{\min}}^{\overline{D}_{\max}} f_n(\overline{D}) d\overline{D} = 1 \\ \int_{\overline{D}_{\min}}^{\overline{D}_{\max}} f_n(\overline{D}) \overline{D} d\overline{D} = \overline{D}_{10} \\ \int_{\overline{D}_{\min}}^{\overline{D}_{\max}} f_n(\overline{D}) \overline{D}^2 d\overline{D} = \overline{D}_{20}^2 \\ \int_{\overline{D}_{\min}}^{\overline{D}_{\max}} f_n(\overline{D}) \overline{D}^3 d\overline{D} = 1 \end{array} \right. \quad (27)$$

式中 $\overline{D}_{10} = \frac{\sum \overline{D}_i n_i}{N}$ 为几何平均直径； $\overline{D}_{20} = \sqrt{\frac{\sum \overline{D}_i^2 n_i}{N}}$ 为面积平均直径，通过编程可以对上述方程进行数值求解。

3 挑流泄洪雾化液滴粒径分布研究

挑流泄洪雾化采用刘丹等^[20]挑流泄洪雾化实验数据进行研究，选用其中典型的 2 个工况，实验的工况如表 1 所示。

表 1 挑流泄洪雾化实验工况^[20]

Table 1 Working conditions parameters of flip flow discharge atomization experiment^[20]

工况	流量/(m ³ /h)	水舌平均速度/(m/s)	空气压强/kPa	空气密度/(kg/m ³)	温度/℃
1	165	15.28	66.87	0.82	12
2	170	15.74	66.87	0.82	12

同时运用方程组(27)的方法构建封闭方程组，对式(1)和式(4)的液滴粒径分布函数进行求解。构建方程组如下所示：

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\overline{D}_{\min}}^{\overline{D}_{\max}} f_{nC}(\overline{D}) d\overline{D} = 1 \\ \int_{\overline{D}_{\min}}^{\overline{D}_{\max}} f_{nC}(\overline{D}) \overline{D} d\overline{D} = \overline{D}_{10} \\ \int_{\overline{D}_{\min}}^{\overline{D}_{\max}} f_{nC}(\overline{D}) \overline{D}^2 d\overline{D} = \overline{D}_{20}^2 \end{array} \right. \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\overline{D}_{\min}}^{\overline{D}_{\max}} f'_n(\overline{D}) d\overline{D} = 1 \\ \int_{\overline{D}_{\min}}^{\overline{D}_{\max}} f'_n(\overline{D}) \overline{D} d\overline{D} = \overline{D}_{10} \end{array} \right. \quad (29)$$

通过求解方程组(27)——(29)可以得到 MEP、Gamma 以及 MEM 分布函数的未知参数，求解结果如表 2 所示。

表 2 挑流泄洪雾化 MEP、Gamma、MEM 的分布参数计算结果

Table 2 Calculation results of distribution parameters of MEP, Gamma and MEM for splash discharge atomization

工况	MEP				Gamma			MEM	
	γ	α_1	$\alpha_2/(s/m)$	$\alpha_3/(s^2/m^2)$	b	β	Λ	λ_0	λ_1
1	4.67	5.07	-13.03	6.84	2.66	0.12	2.28	20.93	6.40
2	2.66	2.45	-13.08	10.7	4.94	0.49	2.70	12.87	4.23

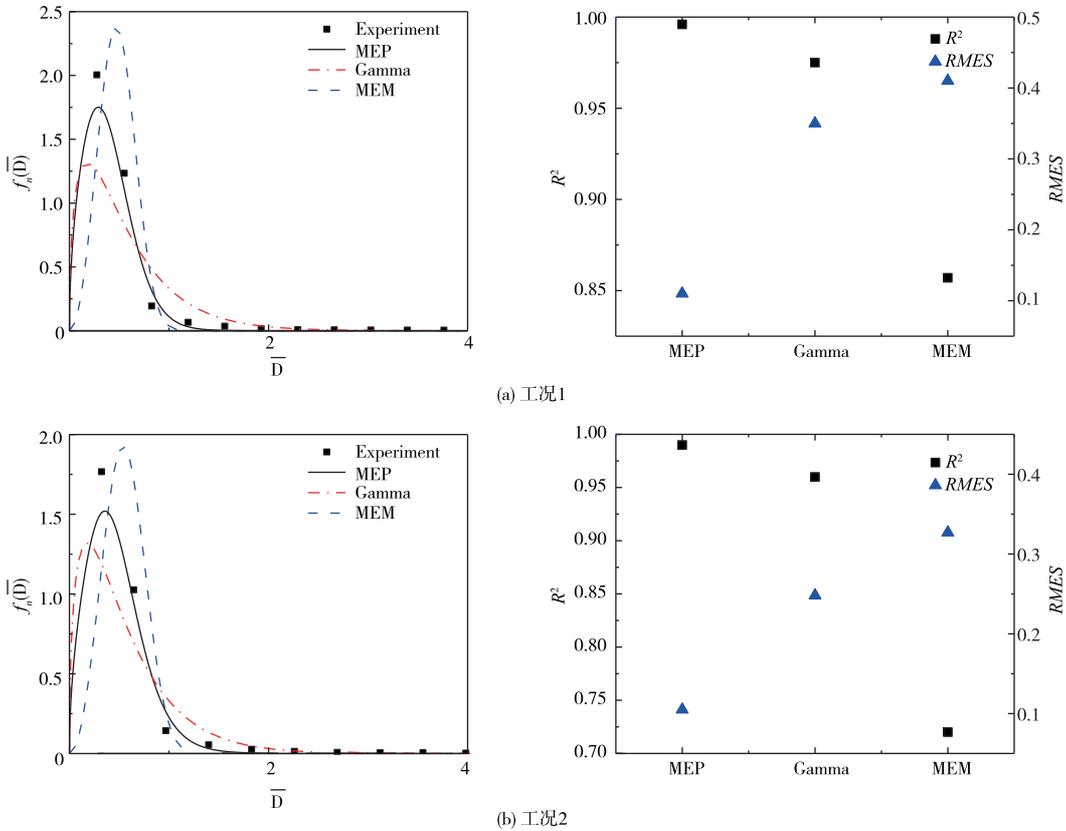


图 2 挑流泄洪雾化液滴粒径数量概率密度分布及计算误差

Fig.2 Probability density distribution and calculation error of atomized droplet size in flip flop discharge

图 2 为挑流泄洪雾化液滴粒径数量概率密度分布实验值与计算值的对比，以及计算结果的决定系数和均方根误差。从数量密度分布图可以看出，MEP 模型计算的结果比 Gamma 和 MEM 分布计算结果更加符合实测数据的变化趋势。Gamma 分布计算结果存在削峰特征，滴谱分布的众值直径偏向于小粒径方向，且计算的峰值比实验值低。MEM 分布计算的滴谱分布的众值直径明显偏向于大粒径方向，且计算的峰值比实验值偏高。本文构建的 MEP 模型的计算结果最为理想，计算的峰值对应的液滴直径与实验数据基本吻合，但是计算的峰值较实验值偏低，这是因为实验观测到的最小液滴直径为 0.3 mm，没有考虑到粒径为 0~0.3 mm 的液滴。

对比 MEP、Gamma 以及 MEM 分布函数计算结果的决定系数和均方根误差可以看出，在这两种情况下，MEP 模型计算结果的决定系数最高，两种工况条件下分别为 0.993、0.991，均方根误差最小，分别为 0.111、0.105。MEM 分布计算结果的决定系数在三个模型中最低，分别为 0.735、0.742，均方根误差最大，分别为 0.407、0.327。Gamma 分布计算结果的决定系数分别为 0.975、0.959，均方根误差分别为 0.345、0.248。MEP 比 Gamma 计算结果的决定系数平均提高 3.9%，均方根误差平均降低 62.7%。由此可见本文构建的 MEP 模型比 Gamma 分布和 MEM 模型更适合预测泄洪雾化雨滴谱分布。

4 结论

本文基于最大熵基本理论, 结合质量方程、动量方程以及能量方程建立了泄洪雾化液滴粒径分布模型, 即 MEP 模型, 提出了对挑流泄洪雾化液滴的粒径与速度联合分布。研究结论如下:

(1) 应用最大熵原理, 利用质量守恒、动量守恒以及能量守恒作为约束条件, 建立了泄洪雾化液滴粒径数量概率密度分布函数, 构造出适用于泄洪雾化条件的函数求解方法。

(2) 应用 MEP 模型和目前泄洪雾化广泛应用的 Gamma 分布对挑流泄洪实验产生的水滴粒径分布概率密度进行计算。结果表明: 在不同工作条件下, MEP 模型计算结果的平均决定系数比 Gamma 计算结果高 3.9%, 平均均方根误差低 62.7%。Gamma 分布计算结果存在削峰特征, 液滴粒径概率密度分布的众值直径偏向于小粒径方向, 且计算的峰值比实验值低。

(3) 应用 MEP 模型和前人最大熵理论推导的 MEM 分布对挑流泄洪实验产生的水滴粒径分布概率密度进行计算。结果表明: 在不同工作条件下, MEP 模型计算结果的平均决定系数比 MEM 计算结果高 34.3%, 平均均方根误差低 70.3%。MEM 分布计算的液滴粒径概率密度分布的众值直径明显偏向于大粒径方向, 且计算的峰值比实验值偏高。

参 考 文 献:

- [1] 张华, 孙春雨, 陈永访. 基于多尺度数值同化模式的泄洪雾化对天气环境影响的数值模拟研究[J]. 中国水利水电科学研究院学报(中英文), 2022, 20(2): 95-103. (ZHANG Hua, SUN Chunyu, CHEN Yongfang. Numerical simulation of the effects of flood discharge atomization on weather environment based on multi-scale numerical assimilation model[J]. Journal of China Institute Water Resource and Hydropower Research, 2022, 20(2): 95-103. (in Chinese))
- [2] 孙双科. 我国高坝泄洪消能研究的最新进展[J]. 中国水利水电科学研究院学报, 2009, 7(2): 249-255. (SUN Shuangke. Summary of research on flood discharge and energy dissipation of high dams in China[J]. Journal of China Institute Water Resource and Hydropower Research, 2009, 7(2): 249-255. (in Chinese))
- [3] LIAN J, LI C, LIU F, et al. A prediction method of flood discharge atomization for high dams[J]. Journal of Hydraulic Research, 2014, 52(2): 274-282.
- [4] LIU G, TONG F, TIAN B, et al. Finite element analysis of flood discharge atomization based on water-air two-phase flow[J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 81: 473-486.
- [5] LIN L, LI Y, ZHANG W, et al. Research progress on the impact of flood discharge atomization on the ecological environment[J]. Natural Hazards, 2021, 108(5): 1415-1426.
- [6] LIANG Z C. A computation model for atomization flow[J]. Journal of Hydrodynamics: Ser. B, 1991(4): 91-95.
- [7] LIU S H, YIN S R, LUO Q S, et al. Numerical simulation of atomized flow diffusion in deep and narrow gorges [J]. Journal of Hydrodynamics: Ser. B, 2006, 18: 515-518.
- [8] LIAN J, LIU F, ZHANG H. Numerical simulation of atomization due to flood discharges of hydropower stations [J]. Transactions of Tianjin University, 2006(5): 341-345.
- [9] LIU Haitao, LIU Zhiping, XIA Qingfu, et al. Computational model of flood discharge splash in large hydropower stations[J]. Journal of hydraulic research, 2015, 53(5): 576-587.
- [10] MASON B J. Physics of clouds and precipitation[J]. Nature, 1954, 174: 957-959.
- [11] WALKOR L, et al. New RAMS cloud microphysics parameterization part I: the single-moment scheme [J]. Atmospheric Research, 1995, 38(1/4): 29-62.
- [12] MARSHALL J S, PALMER W M K. The distribution of raindrops with size[J]. J. Meteor, 1948, 5(4): 165-166.
- [13] A G W, B H X A, A H Y, et al. Characteristics of summer and winter precipitation over northern China[J]. Atmospheric Research, 2017, 197: 390-406.
- [14] SMITH P, PAUL L. Raindrop size distributions: exponential or Gamma—Does the difference matter?[J]. Journal

- of Applied Meteorology, 2003, 42(7): 1031-1034.
- [15] 刘士和, 陆晶, 周龙才. 窄缝消能与碰撞消能雾化水流研究[J]. 水动力学研究与进展(A辑), 2002(2): 189-196. (LIU Shihe, LU Jing, ZHOU Longcai. Study on atomized flow resulted from slit-type bucket energy dissipation and flow impingement[J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 2002(2): 189-196. (in Chinese))
- [16] 张华, 练继建, 李会平. 挑流水舌的水滴随机喷溅数学模型[J]. 水利学报, 2003(8): 21-25. (ZHANG Hua, LIAN Jijian, LI Huiping. Mathematical model of droplet randomly formed by splash of nappe[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2003(8): 21-25. (in Chinese))
- [17] 范敏, 刘士和, 张康乐. 雾化水流溅抛雨滴粒径分布的实验研究与数值模拟[C]//第五届全国水力学与水利信息学大会论文集. 2011: 1-6. (FAN Min, LIU Shihe, ZHANG Kangle. Experimental study and numerical simulation of droplet size distribution of atomized water flow[C]//Proceedings of the Fifth National Conference on Hydraulics and Hydraulic Informatics. Tianjin University Press, 2011: 1-6. (in Chinese))
- [18] 柳海涛, 徐建荣, 孙双科, 等. 海拔高程对泄洪雾化影响的敏感分析[J]. 水利学报, 2019, 50(11): 1365-1373. (LIU Haitao, XU Jianrong, SUN Shuangke, et al. Sensitivity analysis of the effect of elevation on flood discharge atomization[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2019, 50(11): 1365-1373. (in Chinese))
- [19] 徐建荣, 柳海涛, 彭育, 等. 基于泄洪雾化影响的白鹤滩水电站坝身泄洪调度方式研究[J]. 中国水利水电科学研究院学报, 2021, 19(5): 449-456, 468. (XU Jianrong, LIU Haitao, PENG Yu, et al. Analysis of dam orifice operation mode of Baihetan Hydropower Station based on the influence of flood discharge atomization[J]. Journal of China Institute Water Resource and Hydropower Research, 2021, 19(5): 449-456, 468. (in Chinese))
- [20] 刘丹. 低气压对泄流雾化的影响研究[D]. 天津: 天津大学, 2020. (LIU Dan. Research on the Influence of Low Air Pressure on Discharge Atomization[D]. Tianjin: Tianjin University, 2020. (in Chinese))
- [21] SELLENS R W, BRZUSTOWSKI T A. A simplified prediction of droplet velocity distributions in a spray[J]. Combustion & Flame, 1986, 65(3): 273-279.
- [22] LI Xianguo, RICHARD S, TAN K. Droplet size distribution: a derivation of a nuki-yama-tanasawa type distribution function[J]. Combustion Science & Technology, 1987, 56(1/3): 65-76.
- [23] COUSIN J, YOON S J, DUMOUCHEL C. Coupling of classical linear theory and maximum entropy formalism for prediction of drop size distribution in sprays: Application to pressure-swirl atomizers[J]. Atomization & Sprays, 1996, 6(5): 601-622.
- [24] DUMOUCHEL Christophe, MALOT Hélène. Development of a three-parameter volume-based spray drop size distribution through the application of the maximum entropy formalism[J]. Particle & Particle Systems Characterization, 1999, 16: 220-228.
- [25] DUMOUCHEL Christophe. A new formulation of the maximum entropy formalism to model liquid spray drop size distribution[J]. Particle & Particle Systems Characterization, 2006, 23: 468-479.
- [26] JAYNES E T. Information theory and statistical mechanics[J]. Physical E-view, 1957, 106(4): 620-630.
- [27] LI Meishen, LI Xianguo. A second-order newton-raphson method for improved numerical stability in the determination of droplet size distributions in sprays[J]. Atomization and Sprays, 2006, 16(1): 71-82.
- [28] MONDAL D K, et al. Droplet size and velocity distributions in a spray from a pressure swirl atomizer: Application of maximum entropy formalism[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 2004, 218(7): 737-749.
- [29] KIM W, MITRA S, LI X, et al. A predictive model for the initial droplet size and velocity distributions in sprays and comparison with experiments[J]. Particle & Particle Systems Characterization, 2003, 20(2): 135-149.

(下转第 174 页)

Study on key technology of water supply system in centrifugal model test of damming body breaking

ZHANG Shilei^{1,2}, DUAN Qingwei¹, ZHANG Xuedong¹, SONG Jianzheng¹, TANG Zhigang¹

(1. China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100048, China;

2. Inner Mongolia Yinchuo Jiliao Water Supply Co., Ltd., Hinggan League 137400, China)

Abstract: The prediction of flood peak flow and flood time-history curve of damming body breaking is an important basis for the formulation of emergency rescue and downstream risk control plan. The centrifugal model test has unique advantages in studying the mechanism, process and flood time-history curve characteristics of damming body breaking. However, the design of the water supply system in the centrifugal model test involves continuous water supply from the external static state to the high-speed rotating state and maintaining of the upstream water level in the process of the damming body breaking, which is a key problem in the centrifugal model test. In this study, a ring-shaped water tank was designed to ensure the continuous water supply from static to dynamic state. The maximum water volume that can be injected to the water tank was determined through theoretical analysis. In addition, a shaft overflow outlet was set in the test chamber to discharge the redundant water higher than the constant head and ensure the stability of the upstream water level. The above design effectively solved the key problems of water supply system in the centrifugal model test of damming body breaking and ensured the successful completion of subsequent tests.

Keywords: damming body break; centrifugal model test; water supply system; constant head control; shaft overflow outlet; ring-shaped water tank

(责任编辑: 王学风)

(上接第 156 页)

Calculation of raindrop spectrum of flood discharge atomization based on maximum entropy principle

PENG Yanxiang, ZHANG Hua

(North China Electric Power University, School of Water Resources and Hydropower Engineering, Beijing 102206, China)

Abstract: During flood discharge of hydropower station, a large number of moving water droplets with different particle sizes will be formed in the downstream space, which constitutes the problem of particle size distribution of flood discharge atomized droplets. At present, Gamma function is used to describe the droplet size distribution of flood discharge atomization, which belongs to empirical function method and lacks practical physical significance. In this paper, the principle of maximum entropy is applied to the particle size distribution of the atomized droplets of the flood discharge of hydropower stations, and the particle size distribution of the droplets produced by Jet Overflow is studied. The results show that: (1) The spectral distribution of atomized liquid droplets calculated by Gamma distribution has the feature of cutting off the peak value. The diameter corresponding to the peak value of droplet spectral distribution is biased to the direction of small particle size, and the calculated peak value is lower than the experimental value. (2) The diameter corresponding to the peak value of the droplet spectrum distribution of the calculated maximum entropy MEM distribution derived from the mass conservation constraint is obviously biased to the direction of large particle size, and the calculated peak value is higher than the experimental value. (3) Compared with the results of Gamma function and MEM distribution, the MEP distribution model constructed in this paper has the lowest root mean square error and the highest determination coefficient, which is more consistent with the change trend of measured data.

Key Words: particle size distribution of droplet size; maximum entropy principle; Gamma function; jet overflow; flood discharge atomization

(责任编辑: 祁伟)