

文章编号:1672-3031(2018)01-0062-08

土石坝边坡小概率失效计算方法

杜建刚¹, 徐佳成¹, 罗显枫^{2,3}, 李 昕²

(1. 中国国际工程咨询公司 能源业务部, 北京 100048; 2. 大连理工大学 建设工程学部, 辽宁 大连 116023

3. 湖北理工大学 土木建筑工程学院, 湖北 黄石 435003)

摘要: 针对蒙特卡罗随机有限元方法求解土石坝边坡小概率失效问题计算时间过长这一弊端, 提出了基于链表筛分法和Kriging代理模型的混合子集模拟法。首先, 利用链表筛分法计算初始样本点, 并以初始样本点作为Kriging代理模型的训练样本点。然后在子集模拟法的分层模拟中采用Kriging代理模型预测条件样本点的响应值, 从而可计算出土石坝边坡失效概率。最后, 通过一个土石坝边坡算例来说明本方法相比其他方法所需要的计算时间更少, 更适合计算土石坝边坡小概率失效问题。

关键词: 子集模拟法; 链表筛分法; 边坡可靠度; Kriging 代理模型

中图分类号: TU413.6

文献标识码: A

doi: 10.13244/j.cnki.jiwhr.2018.01.009

1 研究背景

在工程实际中经常需要对一些小概率失效的土石坝进行安全性评价分类, 例如水库土石坝的坝坡稳定性安全评价(规范要求其失效概率数量级小于 10^{-5})。面对此类情况时, 如果采用直接蒙特卡罗随机有限元模拟方法则必须抽取 10^5 数量级以上的样本才能估算其失效概率, 导致计算时间冗长^[1]。而子集模拟法是一种针对小概率失效问题的分层抽样算法, 在每一层中引入合理的中间失效事件, 将小概率问题表示成一系列较大的条件概率的乘积^[2-4]。而计算每一层的条件概率所需要抽取的样本数量非常少, 因此它计算失效概率所要的样本总数量要远小于直接蒙特卡罗模拟方法需要的样本数量。另一方面, 很多商业岩土仿真软件常采用基于土的弹塑性本构的强度折减法计算边坡安全系数, 该方法本质上是一种弹塑性增量有限元方法, 而且在边坡安全系数计算中还经常使用基于二分搜索法的强度折减法来反复搜索边坡安全系数的上下界限以至消耗机时过长^[5], 而链表筛分算法无需反复迭代搜索边坡安全系数的上下界限, 从而能快速计算多个样本点的安全系数。因此可以在子集模拟法的第一层初始样本点的响应值计算中采用链表筛分算法来节省计算机时。而在子集模拟法的其余分层模拟中, 可通过经过初始样本点训练后的Kriging代理模型来预测条件样本点的响应值, 从而能进一步节省机时。

本文根据以上分析, 提出了基于链表筛分法和kriging代理模型的混合子集模拟法, 并通过算例说明本方法的有效性。

2 基于链表筛分法和Kriging代理模型的混合子集模拟法

2.1 链表筛分法 链表筛分法能自动计算出按边坡安全系数 FS 大小升序排列的样本集, 其算法原理

收稿日期: 2017-01-24

基金项目: 国家“973”计划项目(No.2013CB036404); 大连理工大学国家重点实验室开放基金(LP1615); 湖北省教育厅科研计划项目(B2017258)

作者简介: 杜建刚(1970-), 男, 河北石家庄人, 学士, 高级工程师, 主要从事工程咨询和风险评价的研究。

E-mail: dujgzl@163.com

通讯作者: 罗显枫(1979-), 男, 湖北武汉人, 博士, 副教授, 主要从事土木工程可靠度与风险控制的研究。

E-mail: 4550573@qq.com

框图见图1所示^[5]。从图中可看到土性参数黏聚力 $c=(c_1, c_2, \dots, c_N)$ 和内摩擦角 $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ 是输入宗量, 是对边坡土性参数 c 和 φ 分别进行直接蒙特卡罗模拟时产生的样本。当边坡土性参数的赋值为样本对 (c_j, φ_j) 时可计算得到相应的边坡安全系数 $FS(c_j, \varphi_j)$, $(j=1, 2, \dots, N)$ 。图1所示的边坡安全系数初始顺序搜索区间为 $FOS(l)=(M/LMAX)*l$, $(l=1, 2, \dots)$, $LMAX$ (l 代表加载的增量步序列号, $LMAX$ 代表最大增量步数)。然后利用弹塑性有限元增量加载的计算特性, 在第 l 次增量步计算中筛选出达到最大迭代次数 $i=IMAX$ 的样本点(i 代表迭代序列号), 该样本点对应的边坡安全系数就是 $FOS(l)$ 。因此, 链表筛分算法实际具有按边坡安全系数从小到大增量顺序搜索这一特性, 所以输入土性参数 c 和 φ , 可以自动计算出按边坡安全系数从小到大顺序排列的安全系数 FS 。而如图2所示商业软件中采用的二分搜索法要进行直接蒙特卡罗模拟时, 只能按样本产生的顺序 (c_j, φ_j) 来计算对应的 $FS(c_j, \varphi_j)$ ($j=1, 2, \dots, N$)。另外, 二分法常常需要把搜索上下界限设置为固定常数(图2中 $t_1=0$, $t_2=5$), 这样会导致当边坡的实际安全系数远小于二分法初始上界时, 二分法搜索目标安全系数耗时过长。

2.2 Kriging 模型 Kriging模型假定系统样本 x 的响应值为随机过程函数 $y(x)$, 由回归模型和随机误差组成^[6], 即

$$y(x) = \sum_{j=1}^p \beta_j f_j(x) + z(x) \quad (1)$$

式中; β_j 为回归系数; $f_j(x)$ 为基函数; $z(x)$ 为二阶平稳的随机过程。

另外, Kriging模型采用已知样本 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的响应值 $y_1, y_2, \dots, y_m$ 的线性组合来预测待测样本点 x 的响应值, 即

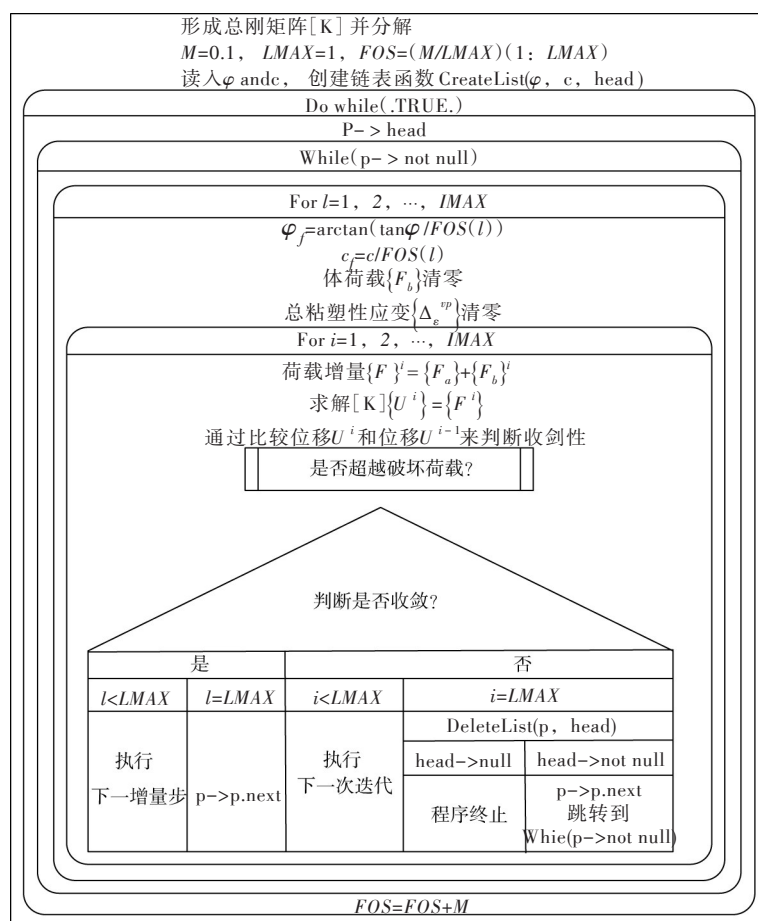


图1 链表筛分法程序结构框图

$$\hat{y}(x) = \sum_{i=1}^m c_i y_i \quad (2)$$

由于Kriging对 $\hat{y}(x)$ 采用的是无偏估计,则需使其预测值的均方误差 $E[(\hat{y}(x)-y(x))^2]$ 达到最小值。这样便可求出系数 $c_1, c_2, \dots, c_m$ 及 $\hat{y}(x)$ 。详细推导步骤可参见相关文献,在此不做赘述。

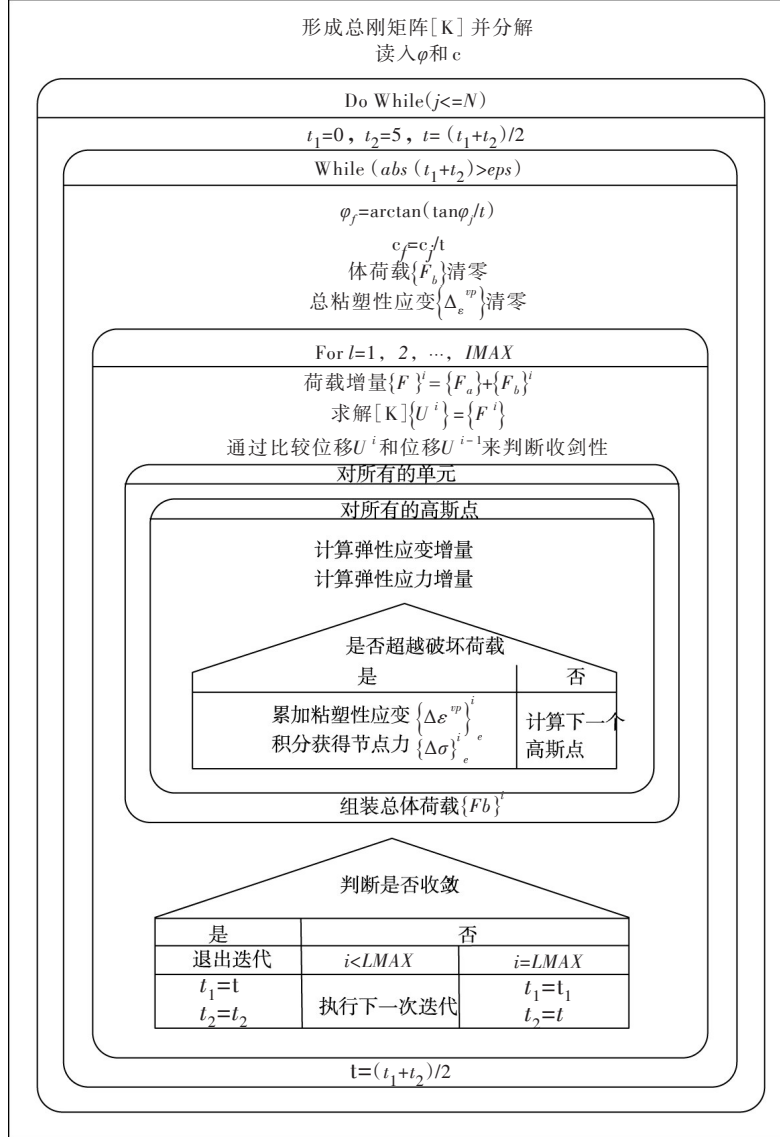


图2 二分法程序结构框图

2.3 子集模拟法 结构的失效概率可以表示为

$$p_f = P(y(x) < 0) = \int f_X(x) dx \quad (3)$$

式中: $f_X(x) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是随机变量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ 的联合概率密度函数; $y(x)$ 是极限状态函数; $y(x) < 0$ 代表结构失效。

对于边坡稳定失效时, 极限状态函数 $y(x)$ 可以表示为

$$y(x) = FS(x) - 1 \quad (4)$$

式中: x 一般是边坡土层的土性参数; $FS(x)$ 是把 x 输入边坡稳定分析程序后计算得到的边坡安全系数。

在子集模拟中, 一个很小的结构失效概率 p_f 被认为是一系列较大的条件失效概率的乘积^[7]

$$p_f = P(FS < 1) = P(F) = P(F_1) \prod_{i=2}^m P(F_i | F_{i-1}) \quad (5)$$

式中: $F_i = \{FS < f_{s_i}\}$, ($i = 1, 2, \dots, m$), 表示一系列中间失效事件; $P(F_i) = P(FS < f_{s_i})$ 表示中间失

效事件 F_i 发生的概率； fs_i 表示中间失效事件 F_i 发生的阈值；这些阈值的大小顺序依次为 $fs_1 > fs_2 > \dots > fs_m = 1$ ；这些中间失效事件满足包含关系 $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_m = F$ ； $P(F_i | F_{i-1}) = P(FS < fs_i | FS < fs_{i-1})$ 表示已知中间失效事件 F_{i-1} 发生时，中间失效事件 F_i 发生的概率。由于 $P(F_i | F_{i-1})$ 的概率大于 $P(F)$ ，所以需要的样本数量也要少，另外在子集模拟中，用马尔可夫蒙特卡罗法(Markov Chain Monte Carlo, MCMC)^[8]计算 $P(F_i | F_{i-1})$ 所需要的样本数量也远小于直接蒙特卡罗方法。

2.4 基于混合子集模拟法的边坡失效概率计算 如研究背景中所提到的，可以利用链表筛分算法自动计算出按边坡安全系数大小升序排列的样本集。这一样本集合可以作为子集模拟法的第一层有序样本集，并用该样本集来训练Kriging模型。然后在子集模拟法的中间事件的样本模拟中采用Kriging模型预测各个条件样本点的边坡安全系数。具体做法如下

(1)步骤1。用直接蒙特卡罗模拟方法产生 N 个独立同分布的样本 $x_j^{(1)}$ ，($j=1, 2, \dots, N$)。

(2)步骤2。利用链表筛分法计算按升序排列的边坡安全系数 $FS(x_j^{(1)})$ 即样本 $x_j^{(1)}$ 的响应值，($j=1, 2, \dots, N$)。取其升序排列后的第 Np_0+1 个值作为第一层中间失效事件发生的阈值 fs_1 。

(3)步骤3。利用样本 $x_j^{(1)}$ 及其响应值 $FS(x_j^{(1)})$ ($j=1, 2, \dots, N$)来构建Kriging模型。

(4)步骤4。从落在 $F_{i-1} = \{FS < fs_{i-1}\}$ ，($i=2, 3, \dots, m$)失效域的 Np_0 个样本出发，利用马尔可夫蒙特卡罗法产生其余条件样本 $x_j^{(i)}$ ，($i=2, 3, \dots, m, j=Np_0+1, Np_0+2, \dots, N$)，条件样本集 $\{x_1^{(i-1)}, x_2^{(i-1)}, \dots, x_{Np_0}^{(i-1)}, x_{Np_0+1}^{(i)}, x_{Np_0+2}^{(i)}, \dots, x_N^{(i)}\}$ 可以记为 $\{x_j^{(i)} : j=1, 2, \dots, N\}$ 。

(5)步骤5。用Kriging模型预测 $FS(x_j^{(i)})$ ，($i=2, 3, \dots, m, j=Np_0+1, Np_0+2, \dots, N$)。把 $FS(x_j^{(i)})$ ，($j=1, 2, \dots, N$)按升序排列后的第 Np_0+1 个值作为中间失效事件 F_i 发生的阈值 fs_i 。

(6)步骤6。重复步骤4和步骤5直到进入第 m 层失效域 $F_m = \{FS < fs_m\}$ 。此时条件概率 $P(F_m | F_{m-1})$ 的估计值为 N_f / N 。(N_f 是落在失效域 F_m 的样本数量)。

(7)步骤7。分层结束后，可计算结构的失效概率估计值 $\hat{p}_f = p_0^{(m-1)} \times N_f / N$ 。

3 土石坝边坡可靠度计算实例

3.1 计算实例 本节用一个关于土石坝边坡稳定失效概率计算的例子来说明所提方法的有效性。这一算例来自于文献[9]。边坡的几何形状及土层划分如图3所示。边坡各土层的土性参数如表1所示。表中属于随机变量的土质指标均认为服从对数正态分布。有限元计算采用八节点四边形的平面应变模型。为了和文献[9]对比，这里的有限元模型也划分为1407个单元。约束条件是边坡的底边界固定约束，左右边界水平约束。土体本构采用理想弹塑性模型和摩尔-库伦破坏准则。

3.2 本文方法计算结果 图4给出第一层全部样本 $FS(x_j^{(1)})$ ($j=1, 2, \dots, N$)的频率直方图(本例中 $N=300$)，从频率直方图中能看出边坡安全系数最小值约为1.2，边坡安全系数最大值约为3.9。这说明直接蒙特卡罗模拟法的抽样中心远离失效域 $FS \leq 1$ 。图5(a)显示出由子集模拟法第二层的第一个样本 $x_1^{(2)}$ 产生的条件样本点的响应值 $FS(x_j^{(2)})$ ($j=Np_0+1, Np_0+2, \dots, Np_0+9$)。因为在本例中假定 $p_0=0.1$ ，所以马尔可夫链的长度 $L=9$ 。从图5(a)中可以看出由于满足Metropolis-Hasting算法的接受准则，初始状态需要进行更新，因此 $FS(x_{Np_0+1}^{(2)})$ 移动到 $FS(x_{Np_0+2}^{(2)})$ 。而 $FS(x_{Np_0+3}^{(2)})$ 与 $FS(x_{Np_0+4}^{(2)})$ 相等是因为不满足Metropolis-Hasting算法的接受准则，所以即时状态保持不变。图5(b)显示出由子集模拟法第四层的第一个样本 $x_1^{(4)}$ 产生的条件样本点的响应值 $FS(x_j^{(4)})$ ($j=Np_0+1, Np_0+2, \dots, Np_0+9$)。从图5(b)中可以看出这些样本点全部落在失效域 $FS \leq 1$ 。这也说明子集模拟法通过分层模拟条件样本点，容易抽取到落入 $FS \leq 1$ 失效域内的样本点。

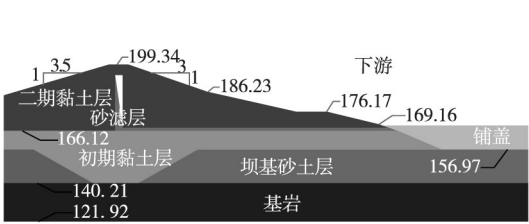


图3 边坡的几何形状及土层分区 (单位: m)

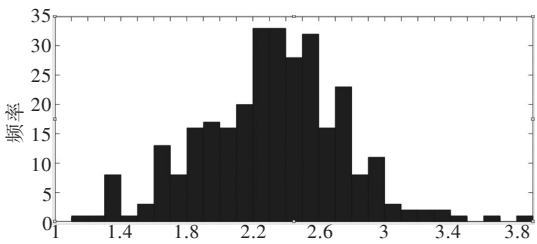


图4 首层全部样本响应值 $FS(x^{(1)})$ 的频率直方图

表1 各土层的土性参数

土层	土质参数	均值	变异系数	相关系数
初期黏土层	c_1/kPa	117.79	0.5	+ 0.1
	$\varphi_1/^\circ$	8.5	1	
	$\gamma_1/(\text{kN/m}^3)$	22	-	
二期黏土层	c_2/kPa	143.64	0.55	-0.55
	$\varphi_2/^\circ$	15	0.6	
	$\gamma_2/(\text{kN/m}^3)$	22	-	
砂滤层	$\varphi_{flr}/^\circ$	35	-	
	$\gamma_{flr}/(\text{kN/m}^3)$	22	-	
坝基砂土层	c/kPa	5	-	
	$\varphi/^\circ$	18	-	
	$\gamma/(\text{kN/m}^3)$	20	-	
铺盖	c_{flr}/kPa	5	-	
	$\varphi_{flr}/^\circ$	35	-	
	$\gamma_{flr}/(\text{kN/m}^3)$	25	-	

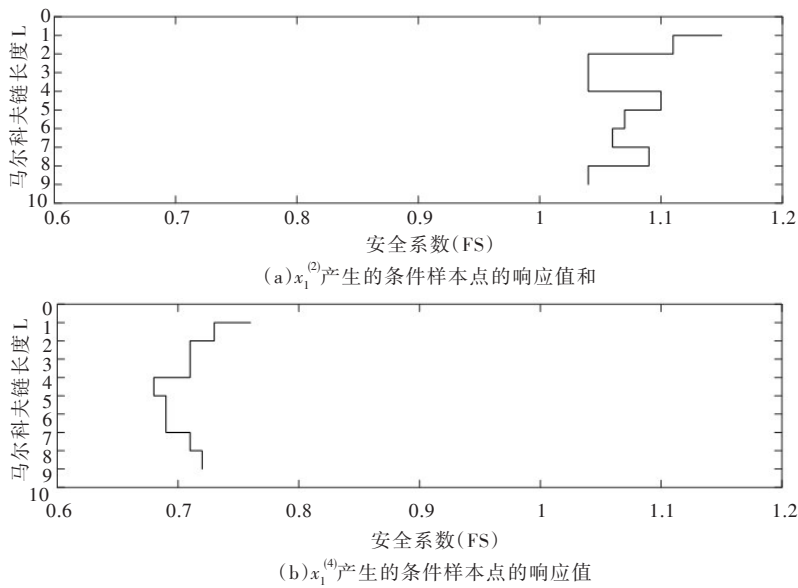


图5 不同条件样本点响应值

为了说明 Kriging 代理模型在分层模拟中的预测效果, 图 6(a) 给出了 Kriging 代理模型对条件样本点 $x_j^{(2)}$ 的响应值 $FS(x_j^{(2)}) (j = Np_0 + 1, Np_0 + 2, \dots, Np_0 + 9)$ 的预测值与有限元法算出的边坡安全系数 (即目标值) 的对比。图中 9 个圆圈的中心位置非常靠近与坐标轴成 45° 夹角的直线 (其中有 3 个圆圈的中心是重合的), 说明 Kriging 代理模型对分层模拟的第二层条件样本点的响应值预测效果显著。图 6

(b)给出了Kriging代理模型对条件样本点 $x_j^{(4)}$ 的响应值($j=Np_0+1, Np_0+2, \dots, Np_0+9$)的预测值与有限元法算出的边坡安全系数(即目标值)的对比。图中9个圆圈的中心位置非常靠近与坐标轴成45°夹角的直线(其中有4个圆圈的中心是重合的),说明Kriging代理模型对分层模拟的第四层条件样本点的响应值预测效果同样显著。

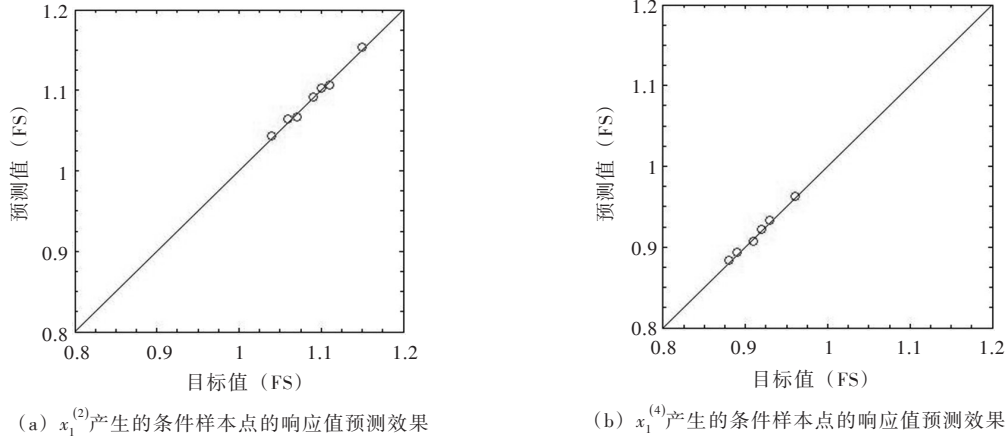


图6 不同条件样本点的响应值预测效果

由于在子集模拟的第四层中有212个失效样本点落入失效域 $F_4 = \{FS < fs_4 = 1\}$,所以本方法的计算结果为边坡失效概率 $p_f = 0.00071$ 。由于 $p_f = \Phi(-\beta)$,这里 $\Phi(\cdot)$ 代表标准正态分布的累积分布函数。所以可以得到边坡的可靠度指标 $\beta = 3.19$ 。因此,本方法的计算结果不仅很接近文献[9]采用直接蒙特卡罗模拟方法计算的边坡失效概率 $p_f = 0.0007$,也很接近文献[9]采用神经网络响应面方法计算的边坡可靠度指标 $\beta = 3.219$ 。这充分说明本方法对计算土石坝边坡的小概率失效问题非常有效。为了进一步说明本方法的计算效率,图7到图9还给出了本文方法与其他方法的比较。

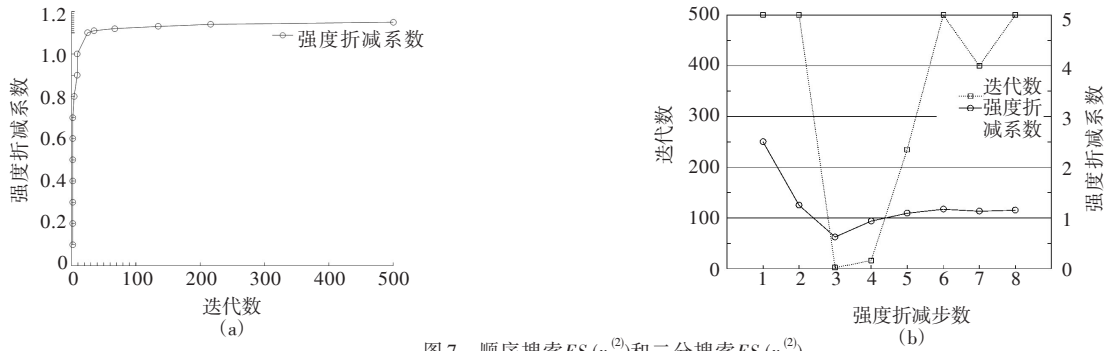


图7 顺序搜索 $FS(x_1^{(2)})$ 和二分搜索 $FS(x_1^{(2)})$

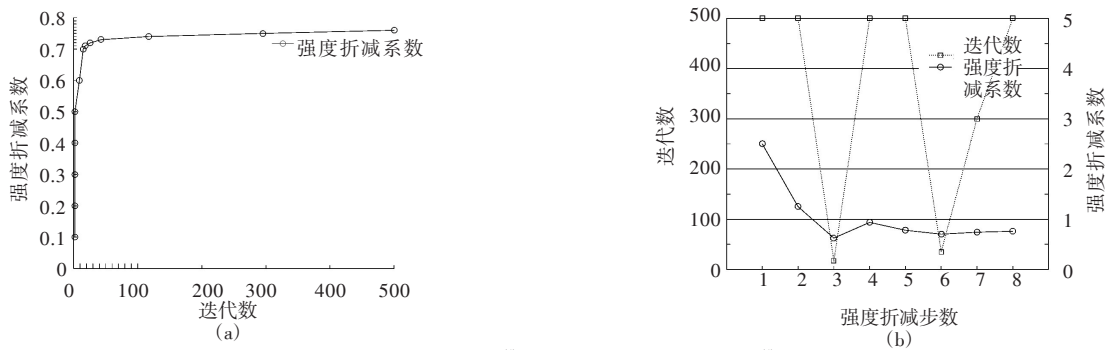


图8 $FS(x_1^{(4)})$ 顺序搜索和二分搜索 $FS(x_1^{(4)})$

3.3 本文方法与其它方法比较 图7(a)显示了链表筛分法计算 $FS(x_{Np_0+1}^{(2)})$ 时在弹塑性有限元分析的每一增量步中所需要的迭代数。从图中可以看出当强度折减系数接近目标边坡安全系数时,则对应该

强度折减系数的增量步中所需要的迭代数也迅速增加。如图所示, 顺序搜索的总迭代数为 $2+2+2+2+2+2+2+4+9+9+25+35+67+135+216+500=1014$ 。图 7(b) 显示了二分法计算 $FS(x_{N_{p_0}+1}^{(2)})$ 时对每一次的强度折减系数计算时所花的迭代数。从图中可以看到二分搜索的总迭代数为 $500+500+2+16+235+500+400+500=2653$ 。图 8(a) 显示了链表筛分法计算 $FS(x_{N_{p_0}+1}^{(4)})$ 时在弹塑性有限元分析的每一增量步中所需要的迭代数。从图中能看出当强度折减系数接近目标边坡安全系数时, 则对应该强度折减系数的增量步中所需要的迭代数也迅速增加。如图所示, 总迭代数为 $2+2+2+2+2+9+15+18+26+43+117+295+500=1033$ 。图 8(b) 显示了二分法计算 $FS(x_{N_{p_0}+1}^{(4)})$ 时对每一次的强度折减系数计算时所花的迭代数。从图中可以看到总迭代数为 $500+500+17+500+500+35+300+500=2852$ 。

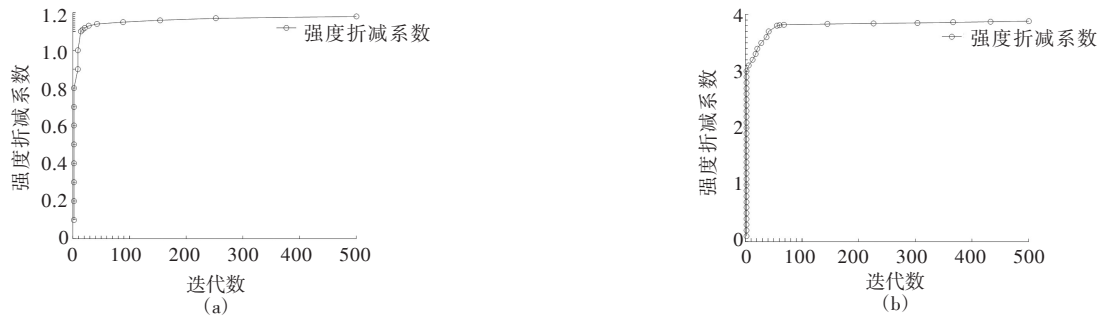


图9 顺序搜索 $\min(FS(x^{(0)}))$ 和顺序搜索 $\max(FS(x^{(0)}))$

另外, 如果采用直接蒙特卡罗方法计算边坡失效概率, 则只需判断 $FS(x) < 1$ 是否为真, 而不用去计算 $FS(x)$, 所以需要的总迭代数只相当于验算强度折减系数为 1 时的迭代数。如图 9(a) 所示判断第一层最小边坡安全系数样本 $\min(FS(x_j^{(0)})) < 1 (j = 1, 2, \dots, N)$ 所需要的迭代数是 9, 而利用顺序搜索法计算其安全系数所经历的迭代总数为 $2+2+2+2+2+2+2+9+9+14+17+21+28+43+89+154+252+500=1152$ 。如图 9(b) 所示判断第一层最大边坡安全系数样本 $\max(FS(x_j^{(0)})) < 1 (j = 1, 2, \dots, N)$ 所需要的迭代数是 2, 而利用顺序搜索法计算其安全系数所经历的迭代总数为 $2*30+6+13+18+21+28+37+41+56+60+68+145+226+304+367+433+500=2383$ 。因此, 判断 $FS(x) < 1$ 是否为真所需要的迭代数远远少于计算 $FS(x)$ 所需要的迭代总数。但是考虑到本算例的失效概率在 10^{-4} 这个数量级上, 所以必须进行 10^4 数量级以上的直接蒙特卡罗模拟抽样才能得到满意结果。而子集模拟法在本算例的初始样本抽取即第一层抽样中只需要计算 300 个样本点的 FS 值, 在其余各分层抽样需要各自计算 270 个样本点的 FS 值。所以不采用 Kriging 代理模型的子集模拟法总共需要计算 1110 个样本点的 FS 值。而采用 Kriging 代理模型后, 只需要计算 348 个样本点的 FS 值 (T_1 其中 48 个样本点为第二到四层中为提高 Kriging 预测精度所增设的样本点)。所以图 10 给出了方法 1 (T_1 直接蒙特卡罗法), 方法 2 (T_2 子集模拟法+链表筛分法), 方法 3 (T_3 子集模拟法+二分法+Kriging) 和方法 4 (T_4 子集模拟法+链表筛分法+Kriging) 的时间对比。从图中显示, 方法 4 即本文所提方法所用时间最少, 约为方法 1 的一半。如果遇到失效概率更小的算例时, 则本文方法的优点会更加明显。

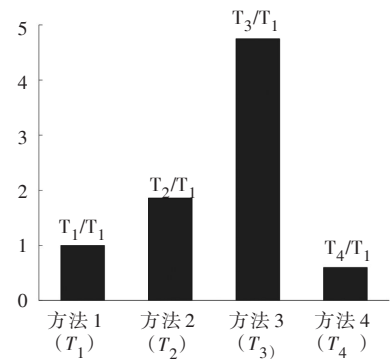


图10 各方法的时间对比图

4 结论

本文提出了一种土石坝边坡小概率失效计算方法。该方法利用链表筛分算法自动计算出按边坡安全系数大小升序排列的样本集。这一样本集合可以作为子集模拟法的第一层有序样本集。然后第

一层样本集可以用来训练 Kriging 代理模型。接着在子集模拟法的中间事件的样本模拟中采用 Kriging 代理模型来预测条件样本的边坡安全系数,这样可以避免对条件样本点的弹塑性有限元计算。另外,该方法所采用的子集模拟部分引入了合理的中间失效事件将失效概率表达为一系列较大的条件失效概率乘积,因此只需要在子集模拟的每一层计算中抽取少量样本点,就能使抽样中心快速向失效域移动。对于本文所提供的 10^{-4} 数量级的边坡稳定的失效概率求解范例中,只需要进行子集模拟的四层抽样计算,就能和直接蒙特卡罗模拟方法的结果非常接近。这足以说明本文所提方法的有效性。此外,通过本文方法与直接蒙特卡罗方法的计算时间分析比较中,可以看出本文方法更适合计算边坡小概率失效问题。

参 考 文 献

- [1] LI D, XIAO T, Cao Z, et al . Enhancement of random finite element method in reliability analysis and risk assessment of soil slopes using Subset Simulation[J] . Landslides, 2016, 13(2): 293–303 .
- [2] 宋述芳, 吕震宙 . 基于马尔可夫蒙特卡罗子集模拟的可靠性灵敏度分析方法[J] . 机械工程学报, 2009, 45(4): 33–38 .
- [3] 宋述芳, 吕震宙 . 基于子集模拟和重要抽样的可靠性灵敏度分析方法[J] . 力学学报, 2008, 40(5): 654–662 .
- [4] 宋述芳, 吕震宙 . 高维小失效概率可靠性分析的序列重要抽样法[J] . 西北工业大学学报, 2006, 24(6): 782–784 .
- [5] LUO X, CHENG T, LI X, et al . Slope safety factor search strategy for multiple sample points for reliability analysis[J] . Engineering Geology, 2012, 129: 27–37 .
- [6] LUO X, LI X, ZHOU J, et al . A Kriging-based hybrid optimization algorithm for slope reliability analysis[J] . Structural Safety, 2012, 34(1): 401–406 .
- [7] AU S, BECK J L . Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation[J] . Probabilistic Engineering Mechanics, 2001, 16(4): 263–277 .
- [8] LI H, CAO Z . Matlab codes of Subset Simulation for reliability analysis and structural optimization[J] . Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016, 54(2): 391–410 .
- [9] CHO S E . Probabilistic stability analyses of slopes using the ANN-based response surface[J] . Computers and Geotechnics, 2009, 36(5): 787–797 .

Calculation of small failure probability in slopes of earth dams

DU Jiangang¹, XU Jiacheng¹, LUO Xianfeng², LI Xin²

(1. China International Engineering Consulting Corporation, Beijing 100048, China;

2. Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: A hybrid subset simulation approach based on the linked-list sifting method and Kriging surrogate model is proposed to overcome the drawback that it takes long time for the Monte-Carlo-based stochastic finite element method to calculate small failure probability in slopes of earth dams. First, the linked-list sifting method is adopted to calculate initial sample points that can be used for training the Kriging surrogate model. Next, the Kriging surrogate model is used to predict the response values of conditional sample points at different levels of subset simulation, which are used to determine the slope failure probability. Finally, a slope example of an earth dam is given to illustrate that the proposed approach costs less time than other approaches, which is more suitable to calculate small failure probability in slopes of earth dams.

Keywords: subset simulation; linked-list sifting method; slope reliability; Kriging surrogate model

(责任编辑: 祁 伟)